

El Filtro de Kalman en Economía: Aplicación a los Datos de Panel y al estudio de Cointegración

Segismundo S. Izquierdo Millán¹, Cesáreo Hernández Iglesias², Javier Pajares Gutiérrez²

¹ Profesor colaborador, Dpto. de Organización y Gestión de Empresas, ETS Ingenieros Industriales, Pº del cauce s/n, 47011 Valladolid, segis@eis.uva.es

² Catedrático de Universidad, Dpto. de Organización y Gestión de Empresas, ETS Ingenieros Industriales, Pº del cauce s/n, 47011 Valladolid, cesareo@eis.uva.es

³ Profesor Titular de Universidad, Dpto. de Organización y Gestión de Empresas, ETS Ingenieros Industriales, Pº del cauce s/n, 47011 Valladolid, pajares@eis.uva.es

RESUMEN

El espacio de estados constituye una formulación matemática flexible capaz de representar una amplia variedad de modelos econométricos: todo modelo econométrico estructural lineal es expresable en el espacio de estados. El filtro de Kalman aplicado sobre un modelo formulado en el espacio de estados permite realizar de forma unificada (válida para todos los modelos) un tratamiento de diversos aspectos, tales como la estimación de parámetros del modelo, la predicción de valores o el análisis de la dinámica del sistema. En este trabajo presentamos una revisión de las principales ideas asociadas al tratamiento de modelos econométricos en el espacio de estados. Analizamos también algunas posibilidades de aplicación del filtro de Kalman al estudio de los datos de panel y al análisis de cointegración.

Palabras clave: espacio de estados, filtro de Kalman, datos de panel, cointegración.

1. Introducción.

El espacio de estados constituye una formulación matemática flexible que da cabida a una amplia variedad de modelos econométricos. La formulación de un modelo econométrico en el espacio de estados abre las puertas para el tratamiento unificado de diversos aspectos del modelo, como el análisis de la dinámica del sistema y, mediante la aplicación del filtro de Kalman, la estimación de parámetros y la predicción. En este trabajo se revisa la formulación en el espacio de estados de distintos modelos econométricos tradicionales y se analizan en particular las aplicaciones sobre dos modelos concretos cuyo estudio ha seguido un considerable desarrollo en los últimos años: los datos de panel y la cointegración.

A lo largo de todo el artículo trabajaremos siempre en tiempo discreto. Usaremos la notación: a – escalar; $\mathbf{a}$ –vector columna; $\mathbf{A}$ – matriz.

2. El espacio de estados.

La formulación matemática del modelo de espacio de estados admite distintas expresiones, de hecho, encontramos representaciones distintas en los distintos autores, sin que tampoco exista unicidad en los símbolos utilizados para referirse a los vectores y matrices del modelo.

El modelo más general (Kalman [1], Luenberger [2]) es de la forma

$$\mathbf{z}_{t+1} = \Phi_t \mathbf{z}_t + \mathbf{v}_t \quad \text{Ecuación de transición de estados} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{M}_t \mathbf{z}_t + \mathbf{e}_t \quad \text{Ecuación de observaciones} \quad (2)$$

donde $\mathbf{z}_t$ es un vector de n estados no directamente observables; $\mathbf{y}_t$ es un vector de m observaciones; $\mathbf{M}_t$ y Φ_t son matrices que, de momento, se suponen conocidas en cada periodo; $\mathbf{v}_t$ y $\mathbf{e}_t$ son vectores aleatorios de media cero y tales que $E(\mathbf{v}_k \mathbf{v}'_j) = \mathbf{Q}_k \delta_{kj}$, $E(\mathbf{e}_k \mathbf{e}'_j) = \mathbf{R}_k \delta_{kj}$ y $E(\mathbf{v}_k \mathbf{e}'_j) = \mathbf{S}_k \delta_{kj}$ donde $\mathbf{R}_k$ es definida positiva y δ_{kj} es la función delta de Kronecker.

En el modelo de espacio de estados, las observaciones están linealmente relacionadas con los estados en cada periodo. La dinámica del sistema está contenida en la ecuación de transición de estados, que es una ecuación vectorial en diferencias de primer orden (recordemos que una ecuación en diferencias de mayor orden es expresable como una ecuación vectorial en diferencias de primer orden). De este modo, los estados guardan, de forma más o menos condensada, la información histórica del sistema que influye en su evolución futura.

Vale la pena considerar otras representaciones del espacio de estados frecuentemente utilizadas en la literatura. Todas ellas son expresables conforme a la representación general indicada anteriormente, y, a menudo, constituyen casos particulares de la representación general. Para modelos de coeficientes (matrices) constantes, Terceiro [3] utiliza una representación de la forma

$$\mathbf{z}_{t+1} = \Phi \mathbf{z}_t + \Gamma \mathbf{x}_t + \mathbf{E} \mathbf{v}_t \quad \text{Ecuación de transición de estados} \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H} \mathbf{z}_t + \mathbf{D} \mathbf{x}_t + \mathbf{C} \mathbf{e}_t \quad \text{Ecuación de observaciones} \quad (4)$$

donde $\mathbf{x}_t$ es de forma explícita un vector de variables exógenas.

En la denominada “representación en forma de innovaciones”, frecuentemente utilizada por presentar diversas ventajas prácticas, el mismo vector de perturbaciones de las observaciones aparece en la ecuación de estados. Por ejemplo, para coeficientes constantes y modelo en innovaciones, Aoki utiliza la representación

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{z}_t + \mathbf{B} \mathbf{e}_t \quad \text{Ecuación de transición de estados} \quad (5)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C} \mathbf{z}_t + \mathbf{e}_t \quad \text{Ecuación de observaciones} \quad (6)$$

Indicar por último que autores como Harvey [4] o Hamilton utilizan una representación con la ecuación de estados desplazada un periodo, de la forma

$$\mathbf{z}_{t+1} = \Phi \mathbf{z}_t + \mathbf{v}_{t+1} \quad \text{Ecuación de transición de estados} \quad (7)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H} \mathbf{z}_t + \mathbf{D} \mathbf{x}_t + \mathbf{e}_t \quad \text{Ecuación de observaciones} \quad (8)$$

Harvey [4] (pp. 103, 112) discute las implicaciones de esta representación desplazada.

3. Formulación de modelos econométricos en el espacio de estados.

Todo modelo econométrico lineal es representable en el espacio de estados. Analizaremos algunos casos:

3.1 Modelo de regresión

El modelo de regresión $y_t = \mathbf{B}' \mathbf{x}_t + e_t$ puede representarse en el espacio de estados acomodado directamente en la ecuación de observaciones:

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{0} \mathbf{z}_t \quad (9)$$

$$y_t = \mathbf{0} \mathbf{z}_t + \mathbf{B}' \mathbf{x}_t + e_t \quad (10)$$

3.2 Modelo de regresión con coeficientes variables

Podemos considerar modelos de estructura similar a los de regresión ($y_t = \mathbf{B}' \mathbf{x}_t + e_t$) en los que los coeficientes $\mathbf{B}$ no sean estáticos, sino que varíen en el tiempo conforme a una dinámica determinada, por ejemplo, que sean paseos aleatorios $\mathbf{B}_{t+1} = \mathbf{B}_t + \mathbf{v}_t$. Estos modelos pueden representarse en el espacio de estados por las ecuaciones

$$\mathbf{B}_{t+1} = \mathbf{B}_t + \mathbf{v}_t \quad (11)$$

$$y_t = \mathbf{x}_t' \mathbf{B}_t + e_t \quad (12)$$

3.3 Representación de un MA(1) en el espacio de estados

Un modelo MA(1), de la forma $y_t = e_t + \alpha e_{t-1}$, puede representarse en el espacio de estados [4] (p. 103) por las ecuaciones ($z_{t+1} = e_t$), ($y_t = \alpha z_t + e_t$). Otra opción sería tomar ($z_{t+1} = \alpha e_t$), ($y_t = z_t + e_t$). Obsérvese que existen distintas representaciones posibles en el espacio de estados y que, en cualquier caso, el estado está guardando la información histórica que será relevante para la evolución del sistema al periodo siguiente.

3.4 Representación de un modelo econométrico estructural (ARMA, VARMAX,...) en el espacio de estados

Aoki [5] indica un procedimiento para representar en el espacio de estados un modelo econométrico estructural en forma reducida, es decir, un modelo de la forma

$$(\mathbf{I} + \mathbf{F}_1 L + \mathbf{F}_2 L + \dots) \mathbf{y}_t = \mathbf{G}(L) \mathbf{x}_t + \mathbf{H}(L) \mathbf{e}_t \quad (13)$$

donde L es el operador retardo y $\mathbf{G}(L)$, $\mathbf{H}(L)$ son matrices de polinomios en L .

Los modelos VARMAX (y dentro de éstos los ARMA) son casos particulares de este modelo econométrico estructural lineal, y, por tanto, son representables en el espacio de estados. Un modelo VARMAX es un modelo estructural $\mathbf{F}(L) \mathbf{y}_t = \mathbf{G}(L) \mathbf{x}_t + \mathbf{H}(L) \mathbf{e}_t$ donde se tiene $\mathbf{F}(L) = (\mathbf{I} + \mathbf{F}_1 L + \mathbf{F}_2 L + \dots)$ y $\mathbf{H}(L) = (\mathbf{I} + \mathbf{H}_1 L + \mathbf{H}_2 L + \dots)$.

El procedimiento de transformación de modelos estructurales indicado proporciona además una representación mínima, es decir, una representación que utiliza el mínimo número posible de estados necesario para representar el sistema.

4. Identificación de modelos econométricos en el espacio de estados.

En muchas ocasiones los parámetros del modelo subyacente a las observaciones serán

desconocidos, y nuestro objetivo será estimar una representación de ese modelo [4, p. 205]. La formulación en el espacio de estados subraya una particularidad en este caso: una representación en el espacio de estados no es identificable, al menos hasta que impongamos algunas condiciones, que en ocasiones pueden resultar arbitrarias.

Supongamos que un sistema es representable en el espacio de estados por las ecuaciones

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{z}_t + \mathbf{B} \mathbf{e}_t \quad \text{Ecuación de transición de estados} \quad (14)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C} \mathbf{z}_t + \mathbf{e}_t \quad \text{Ecuación de observaciones} \quad (15)$$

Consideremos ahora unos nuevos estados definidos por $\mathbf{z}^*_t = \mathbf{T} \mathbf{z}_t$, donde $\mathbf{T}$ es una matriz no singular cualquiera de dimensiones consistentes con el vector de estados. Entonces las primeras igualdades de las ecuaciones

$$\mathbf{z}^*_{t+1} = \mathbf{A}^* \mathbf{z}^*_t + \mathbf{B}^* \mathbf{e}_t = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{z}_t + \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{e}_t \quad (16)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}^* \mathbf{z}^*_t + \mathbf{e}_t = \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{z}_t + \mathbf{e}_t \quad (17)$$

donde las matrices $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$ y $\mathbf{C}^*$ están definidas de forma que se cumplan las segundas igualdades, representan también el sistema estudiado. Ambas representaciones generan la misma función de distribución conjunta para las variables, por lo que la probabilidad de generar un conjunto de observaciones dado es la misma para las dos. Se dice que ambas representaciones son indistinguibles observacionalmente.

Para poder identificar los parámetros de una representación en el espacio de estados es necesario imponer unas condiciones sobre las variables. En particular, dado que los estados pueden sufrir rotación y cambio de escala sin que por ello dejen de poder representar el sistema (cambiarían las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ según lo indicado anteriormente, absorbiendo los cambios en los estados), de cara a la identificación es necesario fijar un sistema coordinado para los estados. Una alternativa frecuentemente utilizada es la de ortogonalizar los estados. Otra opción para fijar la escala de los estados, basada en las propias observaciones, es la llamada “representación equilibrada” [6].

5. El filtro de Kalman. Tratamiento unificado en el espacio de estados.

El filtro de Kalman es un algoritmo que proporciona de forma recursiva el estimador de mínima varianza de los estados, así como su varianza. Su aplicación principal en econometría es la estimación de parámetros de un modelo y la predicción de valores utilizando el modelo.

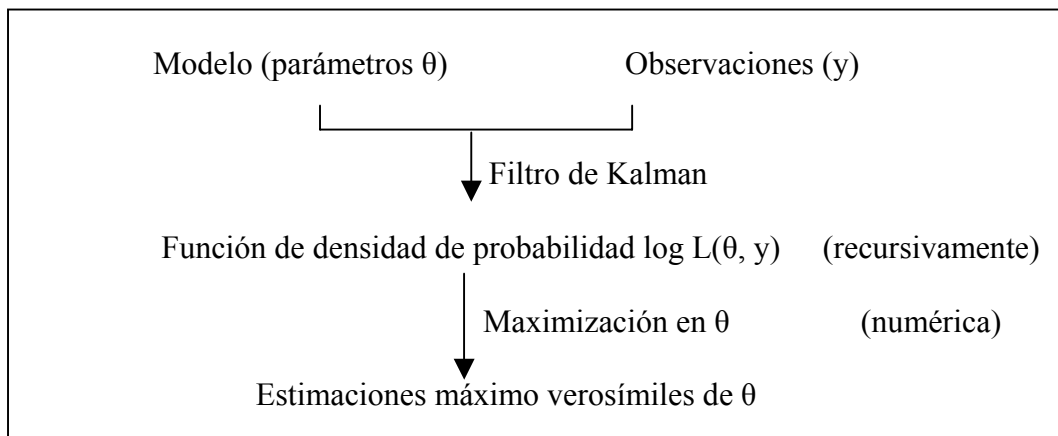
Respecto a la estimación de variables del modelo existen dos posibilidades, que éstas sean estáticas (parámetros propiamente dichos) o que sean dinámicas (“parámetros variables”):

- a) Las variables de interés son dinámicas, es decir, son “parámetros variables” no directamente observables. Es lo que sucede, por ejemplo, en el denominado modelo de regresión con coeficientes variables ($\mathbf{y}_t = \mathbf{B}'_t \mathbf{x}_t + \mathbf{e}_t$). En estos casos las variables de interés forman parte del vector de estados, y la dinámica de estos parámetros variables, que debe ser conocida, vendrá reflejada en la ecuación de transición de estados (ver ecuaciones 11 y 12).

Cuando el sistema contiene parámetros estructurales que básicamente se mantienen constantes, pero en los que se puede llegar a producir saltos o cambios, este enfoque permite estudiar esas variaciones en los parámetros, es decir, estudiar los denominados “cambios estructurales” en el sistema.

En la práctica, lo habitual es que, cuando las variables de interés son dinámicas, existan también parámetros del sistema estáticos pero desconocidos; estos parámetros pueden ser estimados por el procedimiento descrito a continuación.

- b) Las variables de interés son estáticas, son parámetros desconocidos del sistema. En estos casos el filtro de Kalman se utiliza como soporte para el cálculo de estimadores máximo verosímiles o cuasi-máximo verosímiles de los parámetros. Sin entrar en muchos detalles [7], cuando las perturbaciones son gaussianas el filtro de Kalman permite el cálculo recursivo de la función de verosimilitud, expresada en función de los parámetros desconocidos del modelo. La maximización (normalmente por métodos numéricos) de la función de verosimilitud proporciona estimaciones máximo verosímiles (MLE) de los parámetros.



Cuando las perturbaciones no son gaussianas, las estimaciones obtenidas tratando el modelo como si fuera gaussiano se denominan cuasi-máximo verosímiles (QMLE).

6. Datos de panel y filtro de Kalman.

6.1 Modelos de datos de panel

Los datos de Panel son observaciones por individuo (i) y periodo (t) de una variable explicada (y_{it}) y una o varias explicativas (x_{it}) donde se presupone que:

- existe una relación lineal entre la variable explicada y las explicativas. Las variables explicativas pueden incluir retardos de la variable explicada (modelos dinámicos).
- Algunos coeficientes de la relación lineal entre las variables son comunes a todos los individuos. Esta es la característica clave que tratan de explotar los estimadores de datos de panel.

Por ejemplo, un modelo simple de datos de panel sería $y_{it} = \eta_i + \beta x_{it} + e_{it}$, donde η_i es un factor individual y e_{it} es ruido blanco. En el caso de dos individuos, correspondería a una distribución de las observaciones de aspecto similar al que se presenta en la figura 1: observaciones distribuidas en torno a dos rectas de regresión con la misma pendiente.

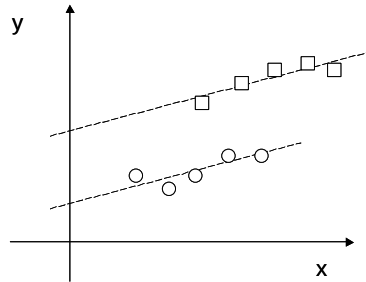


Figura 1: Un modelo de datos de panel

En notación, agrupando las observaciones por periodos, en cada periodo tenemos el vector de variables explicadas $\mathbf{y}_t$ y la matriz de variables explicativas $\mathbf{X}_t$, cuyas filas traspuestas son los vectores de variables explicativas de cada individuo en el periodo t .

¿Qué se hace en “datos de panel”?

- 1 Se postula un modelo para las observaciones. Uno de los más generales (podemos considerar más términos regresivos y algunos coeficientes distintos por individuo) es

$$\mathbf{y}_t = \delta \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_t \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_t = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (19)$$

donde δ y $\boldsymbol{\beta}$ son parámetros comunes a todos los individuos, y donde el vector constante $\boldsymbol{\eta}$ recoge los factores individuales (fijos o aleatorios), cada uno asociado de forma permanente a un individuo.

- 2 Se estiman los parámetros de interés del modelo: δ , $\boldsymbol{\beta}$, varianzas.

- 3 Se comprueban las hipótesis del modelo

6.2 Estimación de parámetros en datos de panel

La mayor parte de la investigación en datos de panel está centrada en la búsqueda de estimadores que presenten buenas propiedades, suponiendo que los datos se ajustan al modelo teórico postulado [8]. Puesto que el modelo postula que algunos parámetros son comunes a todos los individuos, los estimadores tratan de aprovechar la información que cada individuo aporta sobre el parámetro: aunque el número de datos en el tiempo sea muy limitado, podremos encontrar buenos estimadores si tenemos muchos individuos.

Las propiedades de los distintos estimadores son dependientes del modelo subyacente a los datos. Las tablas 1 y 2 presentan un resumen de las propiedades de los estimadores más utilizados, dependiendo del modelo.

Básicamente, en modelos estáticos, en los que los valores actuales de la variable explicada no

influyen en los valores futuros, los estimadores de mínimos cuadrados (mínimos cuadrados con variables dummy o ficticias –MCVF-, generalizados – MCG-, o generalizados factibles– MCGF-) presentan, en general, muy buenas propiedades.

Sin embargo, en modelos dinámicos, se genera una correlación entre regresores y perturbaciones que provoca que los estimadores de mínimos cuadrados pierdan sus buenas propiedades. El enfoque más desarrollado ha sido la búsqueda de estimadores por el método de variables instrumentales (V.I.) y por el método generalizado de los momentos (M.G.M.).

Modelos estáticos				
$y_t = X_t \beta + u_t$ $u_t = \eta + \varepsilon_t$ $E(\varepsilon_{it} \varepsilon'_{js}) = 0$ si $i \neq j$. η_i fijos ó i.i.d.(0, σ^2_η)		No hay correlaciones η - ε - x ε admite heterocedasticidad ⁽¹⁾ y autocorrelación.		
	Estimador	Insesgado	Consistente en n	Eficiente (asint.)
η fijo, ε ruido blanco. $E(uu')$ conocida $E(uu')$ desconocida	MCVF	√	√	√
	MCG	√	√	√
	MCGF	*	√*	√*

(1) Si tenemos que estimar parámetros asociados de forma exclusiva a un individuo (caso de heterocedasticidad sin restricciones), perderemos la consistencia en n, ya que nuevos individuos no aportarán información adicional sobre el parámetro.

* Bajo determinadas condiciones en cada caso. En general necesitaremos estimadores consistentes en el primer paso de MCGF para los parámetros de $E(uu')$. Esto quizá ni siquiera sea posible. Ver Greene [9](p. 445, nota 15).

Tabla 1: Propiedades de los estimadores en modelos estáticos.

Modelos dinámicos				
$y_t = \delta y_{t-1} + X_t \beta + u_t$ $u_t = \eta + \varepsilon_t$ ε_{it} i.i.d.(0, σ^2): ε ruido blanco η_i fijos ó i.i.d.(0, σ^2_η)		No hay correlaciones η - ε - x Por construcción, las perturbaciones u_t están correlacionadas con los regresores y_{t-1} Se requiere que ε_{it} no presente autocorrelación		
	Estimador	Insesgado	Consistente en n	Eficiente (asint.)
	MCVF			
	MCGF			
	V.I		√	
	M.G.M.		√	*

* Puede conseguirse con suficientes condiciones, al menos en algunos casos. Baltagi and Kao [10](p. 28).

Tabla 2: Propiedades de los estimadores en modelos dinámicos.

El estudio de las propiedades teóricas de estos estimadores se suele realizar con carácter asintótico. En cuanto a las propiedades en muestras finitas, éstas resultan en general difíciles de estudiar teóricamente, y suelen estudiarse por simulación. Así por ejemplo, Baltagi y Kao [10] citan estudios en modelos dinámicos en los que un estimador MCVF con corrección del sesgo presentaba buenos resultados en la práctica, frente a otros estimadores consistentes.

6.3 Aplicación del filtro de Kalman en datos de panel

Frente a (o junto a) los estimadores anteriormente citados, y en condiciones de normalidad de las perturbaciones, podemos considerar también el estimador máximo verosímil (ML), que presenta buenas propiedades asintóticas. Es en el cálculo de este estimador donde entra en juego el filtro de Kalman. Si las perturbaciones no son gaussianas, el método proporcionaría estimadores cuasi-máximo verosímiles (QML), que también pueden resultar interesantes.

Existen diversos trabajos en los últimos años en los que se comparan las propiedades del estimador máximo verosímil con las de otros estimadores, principalmente en muestras finitas. En una muy buena revisión del tema, Maes [11] indica que, si las perturbaciones son gaussianas, el estimador ML obtenido mediante el filtro de Kalman presenta muy buenas propiedades teóricas (eficiencia, uso de la información, recursivo,...), y cita algunos estudios prácticos en los que el estimador Kalman-ML obtiene buenos resultados comparativos en muestras finitas. En el caso de perturbaciones no gaussianas, las propiedades teóricas del estimador QML no son conocidas, y, además, existen otros estimadores de propiedades teóricas conocidas y deseables. Pero estos otros estimadores, o bien necesitan condiciones más restrictivas para asegurar sus propiedades deseables, o bien requieren una carga computacional elevada. Maes [11] indica que experimentos utilizando el estimador QML en casos representativos de una amplia variedad de casos reales han proporcionado buenos resultados (sesgos muy reducidos).

7. Cointegración y filtro de Kalman.

7.1 Series estacionarias y no estacionarias

El concepto de cointegración está íntimamente ligado con el de estacionariedad. Una serie es estacionaria (débilmente o de covarianza estacionaria) si $E(y_t) = \mu$, $\text{Var}(y_t) = \sigma_y^2$, $\text{Cov}(y_t, y_s) = f(t-s)$. La distribución de probabilidad de una variable estacionaria no depende del tiempo. Intuitivamente, la serie es estacionaria si se mueve alrededor de su valor medio, con un comportamiento y relación entre las desviaciones similar a lo largo del tiempo. Un ejemplo de serie estacionaria es un ruido blanco, que cumple $E(y_t) = 0$, $\text{Var}(y_t) = \sigma^2$, $\text{Cov}(y_t, y_s) = 0$.

Si una serie no cumple las condiciones indicadas, entonces es no estacionaria. De forma general, si una serie y_t sin componentes deterministas puede representarse, después de diferenciar d veces, como un proceso ARMA estacionario e invertible, la serie es integrada de orden d , representado como $I(d)$. Así pues, una serie estacionaria es $I(0)$, y una serie no estacionaria es $I(1)$ si su serie de primeras diferencias $\Delta y_t = (1-L)y_t$ es estacionaria.

El tratamiento de series no estacionarias exige algunas precauciones, así por ejemplo, un método habitual como es el análisis de regresión provoca (o puede provocar) sobre series no estacionarias la aceptación de relaciones espurias.

La metodología de análisis de series temporales está centrada en las series estacionarias, por lo que el tratamiento de series no estacionarias pasa típicamente por su transformación a estacionarias y su análisis mediante los métodos VAR o Box-Jenkins. Pero, en ocasiones, esta transformación implica pérdida de información. Una alternativa a la transformación a series estacionarias, utilizada principalmente con series no estacionarias $I(1)$, es el análisis de cointegración.

7.2 Cointegración

Sean y_t , z_t series $I(1)$. Sea la diferencia $\varepsilon_t = y_t - \beta z_t$. En general, ε_t será $I(1)$, pero puede que exista un β tal que ε_t sea $I(0)$. Si es así, la diferencia $y_t - \beta z_t$ es estacionaria, “estable” alrededor de una media fija. Se dice entonces que las dos series están cointegradas, con vector de cointegración $[1, \beta]'$.

Esto nos permite estudiar una relación a largo plazo definida por el vector de cointegración y una relación a corto plazo marcada por la serie estacionaria de residuos. Diferenciar las dos series haría perder la relación a largo plazo. Además, si hay cointegración, la representación VAR de las series diferenciadas contiene infinitos términos (si no incluimos niveles, sólo diferencias), por lo que no es práctico diferenciar.

Con carácter más general, considerando un vector $\mathbf{y}_t$ de n variables no estacionarias $I(d)$, si existe un vector $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_t$ es $I(d-b)$ para algún $b>0$, entonces se dice que las variables $\mathbf{y}_t$ están cointegradas $CI(d,b)$. A $\boldsymbol{\beta}$ se le denomina vector de cointegración. Con más de dos variables no estacionarias, puede ser que existan varios vectores linealmente independientes de cointegración.

El caso más habitual es el de series $I(1)$. Siendo $\mathbf{y}_t$ el vector de n variables $I(1)$, podemos tener r vectores independientes de cointegración ($0 \leq r < n$) agrupables en filas en la matriz $\boldsymbol{\Gamma}$ de dimensiones $r \times n$, de modo que $\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{y}_t = \mathbf{u}_t$, donde $\mathbf{u}_t$ es $I(0)$. A r se le denomina rango de cointegración, y es el rango de la matriz $\boldsymbol{\Gamma}$.

Ejemplos típicos de aplicación de la cointegración son los estudios de la paridad del poder adquisitivo entre distintos países o el estudio de la relación entre los ingresos y el consumo. En ambos casos son series no estacionarias con una relación a largo plazo entre ambas.

El análisis de cointegración en series $I(1)$ consiste en

- 1 Comprobar que las series son $I(1)$.
- 2 Estimar el rango de cointegración.
- 3 Estimar los vectores de cointegración.

Existen múltiples enfoques para el análisis de cointegración. Posiblemente el de mayor éxito [11] sea el método de Johansen, que es un enfoque de máxima verosimilitud.

7.3 Tendencias comunes

Si las n variables $I(1)$ del vector $\mathbf{y}_t$ cointegran con rango de cointegración r , entonces podemos encontrar $n-r$ tendencias comunes $\boldsymbol{\tau}_t$ (camino aleatorio con tendencia) [12] tales que

$$\boldsymbol{\tau}_t = \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\tau}_{t-1} + \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (20)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A} \boldsymbol{\tau}_t + \boldsymbol{\phi}(L) \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (21)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ es ruido blanco iid $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$ y $\boldsymbol{\phi}(L) \boldsymbol{\varepsilon}_t$ es estacionario. Intuitivamente, esto quiere decir que r de las variables pueden expresarse como combinación lineal de las otras $(n-r)$ variables, salvo por un residuo estacionario (o todas en función de $n-r$ factores comunes ocultos, salvo residuo estacionario).

7.4 Aplicación del filtro de Kalman al estudio de cointegración

En este apartado indicaremos algunas reflexiones sobre el tema pendientes de confirmación experimental.

Para poder aplicar el filtro de Kalman necesitamos en primer lugar una representación de las series en el espacio de estados. Podríamos basarnos en la representación en forma de tendencias comunes, que es una representación muy próxima al espacio de estados. Necesitaríamos modelar los residuos estacionarios $\phi(L) \varepsilon_t$ en el espacio de estados y anidar este modelo en el de tendencias comunes.

Con el modelo expresado en el espacio de estados, necesitamos además imponer algunas condiciones sobre las variables para que la representación sea identificable. Una vez elegidas estas restricciones, podríamos estimar los parámetros de la representación, y, a partir de éstos, recuperar los vectores de cointegración.

Sin embargo, si el enfoque final de estimación de parámetros es el de máxima verosimilitud, donde el filtro de Kalman habrá sido una herramienta para el cálculo recursivo de la función de verosimilitud, cuyo máximo es buscado por métodos numéricos, parece difícil a priori que el método pueda competir con el de Johansen. Este último es un enfoque de máxima verosimilitud, pero calcula los estimadores máximo verosímiles sin necesidad de realizar una maximización numérica. Podríamos tratar de competir con el método de Johansen allí donde no se cumplen las hipótesis para su aplicación, si bien es cierto que estas hipótesis son poco restrictivas [13].

Por otro lado, existe también la posibilidad de que la estimación no sea vía máxima verosimilitud, como en el interesante enfoque propuesto por Aoki, que podemos encontrar en [6], basado en las correlaciones entre observaciones con distintos retardos, y cuyas propiedades estadísticas no están completamente desarrolladas.

Referencias

- [1] Kalman, R.E. (1960): "A new approach to linear filtering and prediction problems", *J. Basic Engineering, Transactions ASMA, Series D*, 82, 35-45.
- [2] Luenberger, D.G. (1969): *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley & Sons.
- [3] Terceiro, J. (1990): *Estimation of Dynamic Econometric Models with Errors in variables*. Berlin: Springer-Verlag.
- [4] Harvey, A.C. (1989): *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge University Press.
- [5] Aoki, M. (1976): *Optimal Control and System Theory in Dynamic Analysis*. North-Holland.
- [6] Aoki, M. and Havenner, A. (1991): "State space modelling of multiple time series", *Econometric Reviews*, 10 (1) , pp. 1-59.
- [7] Durbin, J. and Koopman, S.J. (2001): *Time Series Analysis by State Space Methods*. Oxford University Press.
- [8] Hall, S.G. and Urga, G. (2000): "New Developments in the Analysis of Panel Data Sets", Imperial College Economics Group Discussion Paper, <http://www.ms.ic.ac.uk/sghall/icms6.pdf>
- [9] Greene, W. H. (1999): *Análisis Económico*, 3ª edición, Prentice Hall.
- [10] Baltagi, H.B. and Kao, C. (2000): "Nonstationary Panels, Cointegration in Panels and Dynamic Panels: A Survey", Working Paper nº 16, Center for Policy Research.

- [11] Maes, K. (2001): "Panel Data estimating continuous-time arbitrage-free affine term structure models with the Kalman filter", working paper.
<http://www.econ.kuleuven.ac.be/ew/academic/intecon/staff/Stijn/kaltut.pdf>.
- [12] Escribano Sáez, A. (1990): "Introducción al tema de cointegración y tendencias", *Cuadernos Económicos de ICE*, 44, 1990/1, pp. 7-42.
- [13] Gonzalo, J. (1994): "Five alternative methods of estimating long-run equilibrium relationships", *Journal of Econometrics*, 60, pp. 203-233.