Sea la función de producción horaria de una empresa: $y = K^{0.5} L^{0.4}$.
Donde K es el número de máquinas y L el de trabajadores activos en esa hora. Los precios horarios unitarios de estos dos factores son respectivamente $r = 80$ € y $w = 30$ €. Calcule la función de costes $C = C(y)$ si se puede modificar el valor de L y de K (largo plazo)

Planteamiento:

$Min\ (80\ K + 30\ L)$

$Sujeto\ a\ K^{0.5} L^{0.4} = y$

Donde "y" es el nivel de producción deseado (parámetro)

Formamos la función lagrangiana

$\mathcal{L} = 80\ K + 30\ L + \lambda\ (y - K^{0.5} L^{0.4})$

Igualando las parciales a cero:

$80 - \lambda\ 0.5\ (K^{0.5} L^{0.4})/K = 0$

$30 - \lambda\ 0.4\ (K^{0.5} L^{0.4})/L = 0$

$y - K^{0.5} L^{0.4} = 0$

Despejando λ en las dos primeras obtenemos la senda de expansión ($PMa_L / w = PMa_K / r$), *que en este caso resulta ser* $L = (32/15)\ K$,

de donde

$y = K^{0.5} L^{0.4} = K^{0.5}\ [(32/15)\ K]^{0.4} \rightarrow K = (15/32)^{4/9} y^{1/0.9}$;

$C = 80\ K + 30\ L = 80\ K + 30\ (32/15)\ K = 144\ K = 144\ (15/32)^{4/9} y^{10/9}$